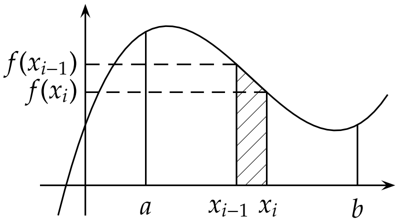
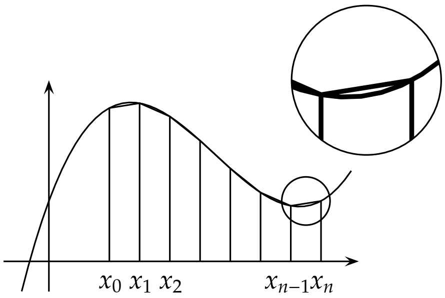
1 予備知識

関数 $f(x)$ を 1 次関数（直線）で近似することで、不定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の近似値を求める方法を台形公式と呼びます。積分区間 $[a,\ b]$ を n 等分

$$\varDelta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_i = a + \frac{i \cdot (b-a)}{n} \quad (0 \leqq i \leqq n) \tag{♠}$$

した場合の台形公式を導いてみましょう。





各小区間 $[x_{i-1},\ x_i]$ において、4 点 $(x_{i-1},\ 0)$、$(x_i,\ 0)$、$(x_i,\ f(x_i))$、$(x_{i-1},\ f(x_{i-1}))$ を頂点とする台形の面積は

$$\{（上底）+（下底）\} \times（高さ）\div 2 = \Big\{f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big\} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{1}{2}$$

ですから、これらの総和 $S(n)$ は、各小区間の長さを $d = \dfrac{b-a}{n}$ とおくとき、

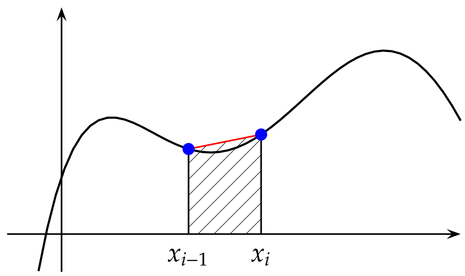
$$\begin{aligned} S(n) &= \sum_{i=1}^{n} \Big\{f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big\} \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{d}{2} \sum_{i=1}^{n} \Big\{f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big\} \\ &= \frac{d}{2}\left\{f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right\} = \frac{d}{2}\left\{f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\,d)\right\} \end{aligned}$$

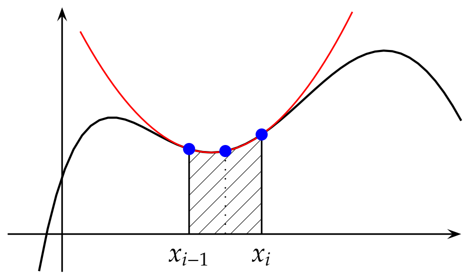
と表されます。この $S(n)$ による近似が台形公式です。

2 2 次関数による近似

台形公式は 1 次関数による近似でしたが、2 次関数（放物線）による近似は（合成）Simpson の公式と呼ばれています。すなわち、区間分割 (♠) を考えるとき、各小区間 $[x_{i-1},\ x_i]$ において、端点 $(x_{i-1},\ f(x_{i-1}))$、$(x_i,\ f(x_i))$ および中点の 3 点を通る 2 次曲線によって、曲線 $y = f(x)$ を近似する方法です。

次の図は、1 次関数（左）と 2 次関数（右）による近似の様子です。





Maxima を使って、Simpson の公式を導いてみたいと思います。まず、3 点

$$P_1\,(x_{i-1},\, f(x_{i-1})),\quad P_2\,(x_i,\, f(x_i)),\quad P_3\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2},\, f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right)$$

を通る 2 次曲線 $y = a\,x^2 + b\,x + c$ を求めます。

```
(%i1) p[1]: [x[i-1], y[1]];
(%o1)                              [x     , y ]
                                     i - 1   1
(%i2) p[2]: [(x[i-1] + x[i]) / 2, y[2]];
                                 x  + x
                                  i    i - 1
(%o2)                           [-----------, y ]
                                      2        2
(%i3) p[3]: [x[i], y[3]];
(%o3)                              [x , y ]
                                     i   3
(%i4) g(x, y) := a*x^2 + b*x + c - y;
                                        2
(%o4)                        g(x, y) := a x  + b x + c - y
(%i5) l: makelist(g(p[i][1], p[i][2]), i, 1, 3)$

(%i6) s: solve(l, [a, b, c])$
```

求める 2 次式を g(x, y) と置き、あらかじめ用意しておいた 3 点 P_1、P_2、P_3 の座標[*1]を代入し、係数 a、b、c を求めました。なお、式がやや複雑になるため、命令の末尾を $ にして、結果を出力しないようにしました。

関数 $a\,x^2 + b\,x + c$ を積分し、係数 a、b、c を代入すれば、小区間 $[x_{i-1},\, x_i]$ における近似面積が求められます。

[*1] y 座標については特に重要な処理は行われませんから、適当に y_1、y_2、y_3 と置いています。

```
(%i7) integrate(g(x, 0), x, x[i - 1], x[i]);
            3         2                  3            2
       2 a x  + 3 b x  + 6 c x    2 a x      + 3 b x      + 6 c x
            i         i        i         i - 1        i - 1        i - 1
(%o7)  ------------------------ - ------------------------------------
                  6                                6
(%i8) factor(subst(s, %));
                       (y  + 4 y  + y ) (x  - x    )
                         3      2    1    i    i - 1
(%o8)                  ------------------------------
                                     6
```

各近似面積が

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (a\,x^2 + b\,x + c)\,dx = \frac{x_i - x_{i-1}}{6}\left\{f(x_{i-1}) + 4\,f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right) + f(x_i)\right\}$$

と求まりました。従って、近似面積の総和 $S(n)$ は、$d = \dfrac{b-a}{n} = x_i - x_{i-1}$ とおくと、

$$\begin{aligned}
S(n) &= \frac{d}{6}\sum_{i=1}^{n}\left\{f(x_i) + f(x_{i-1}) + 4\,f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{d}{6}\left\{f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)\right\} \\
&= \frac{d}{6}\left\{f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\,d) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(a - \frac{d}{2} + i\,d\right)\right\}
\end{aligned}$$

と表されます。これが Simpson の公式です。

$$\int_a^b f(x)\,dx \fallingdotseq \frac{d}{6}\left\{f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(a + i\,d) + 4\sum_{i=1}^{n} f\left(a - \frac{d}{2} + i\,d\right)\right\}$$

作成日：平成 20 年 8 月 27 日〜 9 月 2 日
ソフトウェア：Maxima 5.16.0cvs & SBCL 1.0.20